В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Екатеринбург, yunsub@imm.uran.ru

КЛАСС ВСЕХ ЕДИНИЧНЫХ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГРОМЕКИ

Методом отображений, изменяющих геометрическое строение векторного поля (см. [1], [2]), конструируется класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R^3 (класс $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$), исчерпывающий класс всех гладких решений системы уравнений

$$\begin{cases} [\vec{\beta}, \operatorname{rot}\vec{\beta}\,] = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{\beta} \neq 0 \ \text{ почти всюду в } \ R^3, \\ |\vec{\beta}\,| = 1, \qquad \vec{\beta} \in C^{(1)}(R^3). \end{cases}$$

Это задача Громеки [3] при дополнительном условии аксиальной симметрии поля $\vec{\beta}$. При задании поля и положения точек $\vec{X} \in R^3$ используются цилиндрические координаты r, θ, z с базисом $\{\vec{i_r}(\theta), \ \vec{i_\theta}(\theta), \ \vec{i_z}\}$, где $\vec{i_z}$ направлен вдоль оси аксиальной симметрии. Описание полей дается теоремой.

Теорема. *Соответствие* $\vec{X} = \vec{X}(r,\theta,z) \to \vec{\beta} = \vec{\beta}(r,\theta,z)$ *определяет векторное поле класса* $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$, *если оно представимо в виде*

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}(r,\theta,z) = \begin{cases} (-1)^n \vec{i_z}, & r = 0, \\ \vec{\beta_+}(r,\theta,z), & r > 0, \end{cases}$$

$$\vec{\beta_+}(r,\theta,z) = \Big\{(\rho/r)\sin\psi(\rho)\Big[\big(\sin\varphi(\rho) + (z/\rho)\operatorname{tg}\psi(\rho)\big)\vec{i_r}(\theta) - \\ - \cos\varphi(\rho)\vec{i_\theta}(\theta)\Big] + \cos\psi(\rho)\vec{i_z}\Big\}\Big|_{\rho=\rho(r,z)},$$

и при этом

1) *переменная* ρ *как функция* r, z *определяется неявно уравнением*

$$\rho^2 \cos^2 \varphi(\rho) + [\rho \sin \varphi(\rho) + z \operatorname{tg} \psi(\rho)]^2 - r^2 = 0;$$

2) *функции* $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ *непрерывны на промежутке* $R_+ = [0, +\infty)$ *и подчиняются ограничениям:* $\psi(0) = n\pi$, $0 < \psi(\rho) - n\pi < \pi/2$ (*либо* $-\pi/2 < \psi(\rho) - n\pi < 0$), $-\pi/2 < \varphi(\rho) - m\pi < \pi/2$ *при* $\rho > 0$, *где* n, m — *целые числа, причем* $|\psi(\rho) - n\pi|$ — *неубывающая функция*;

3) *производная* $\psi'(\rho)$ *также непрерывна на промежутке* R_+, *причем* $\psi'(0) = 0$, *а производная* $\varphi'(\rho)$ *непрерывна на* R_+, *за исключением быть может точки* $\rho = 0$;

4) *функции* $\psi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ *и их производные удовлетворяют следующим условиям:*

(*a*) $\varphi'(\rho) \sin \psi(\rho) \to 0$, $\varphi'(\rho)[\rho^{-1} \operatorname{tg} \psi(\rho)]^2 \to 0$ *при* $\rho \to 0$;

(*b*) *существует предел производной* $[\rho^{-1} \operatorname{tg} \psi(\rho) \cos \varphi(\rho)]'$ *при* $\rho \to 0$;

(*c*) $|\cos \varphi(\rho)| - (-1)^m \rho \varphi'(\rho) \sin \varphi(\rho) > 0$ *при* $\rho > 0$;

(*d*) *всюду, где* $|\psi(\rho) - n\pi|' > 0$, *выполняется неравенство*

$$Q(\rho) = \{[\rho \sin \varphi(\rho) \operatorname{tg} \psi(\rho)]'\}^2 / \{2\rho [\operatorname{tg}^2 \psi(\rho)]'\} < 1,$$

а всюду, где $|\psi(\rho) - n\pi|' = 0$, *выполняется равенство* $[\rho \sin \varphi(\rho)]' = 0$;

(*e*) *существует предел* $\lim\limits_{\rho \to +0} Q(\rho) = Q_0$, *а если* $\psi(\rho)$ *при* $\rho \to \infty$ *имеет горизонтальную асимптоту* $\psi = \psi_\infty$ $(0 < |\psi_\infty - n\pi| \leqslant \pi/2)$, *то существует и предел* $\lim\limits_{\rho \to \infty} Q(\rho) = Q_\infty$, *причем* $Q_0 < 1$, $Q_\infty < 1$.

Ротор и дивергенция полей класса $C^{(1)}(R^3, \mathfrak{L}_{\mathrm{uas}}(R^3))$ выражаются формулами $\operatorname{rot} \overrightarrow{\beta} = B \overrightarrow{\beta}$, $\operatorname{div} \overrightarrow{\beta} = \delta$. Здесь $B = 0$,

$\delta = 0$ при $r = 0$, а при $r > 0$ имеем

$$B = -2[a(\rho)\sin\psi(\rho)]'/J(\rho,z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)},$$

$$\delta = [2\psi'(\rho)æ(\rho,z) + æ'_\rho(\rho,z)\sin 2\psi(\rho)]/J(\rho,z)\Big|_{\rho=\rho(r,z)},$$

где

$$a(\rho) = \rho\cos\varphi(\rho), \quad æ(\rho,z) = \rho\sin\varphi(\rho) + z\,\mathrm{tg}\,\psi(\rho),$$

$$J(\rho,z) = [a^2(\rho) + æ^2(\rho,z)]'_\rho\cos\psi(\rho).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00014) и программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-1071.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. *Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15. – № 1. – С. 111–121.

2. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. *К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений* // Тр. Ин-та матем. и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14. – № 3. – С. 82–91.

3. Громека И. С. *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости.* Докторская диссертация. – Отд. изд. Казань. – 1881. – 107 с. (в книге “И. С. Громека. Собрание сочинений”. М.: Из-во АН СССР, 1952. – 296 с.).